DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA

DI ALCUNE PROPRIETÀ

DELLA

SUPERFICIE GENERATA DALLA CURVA LOGARITMICA

MOVENTESI ELICOIDALMENTE INTORNO AL SUO ASSINTOTO

DI

GIUSEPPE BRUNO

STAMPERIA REALE DI TORINO

1879

DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA

DI ALCUNE PROPRIETÀ

DELLA

SUPERFICIE GENERATA DALLA CURVA LOGARITMICA

MOVENTESI ELICOIDALMENTE INTORNO AL SUO ASSINTOTO

DI

GIUSEPPE BRUNO

STAMPERIA REALE DI TORINO

1879

DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA

DI ALCUNE PROPRIETÀ

DELLA

SUPERFICIE GENERATA DALLA CURVA LOGARITMICA

MOVENTESI ELICOIDALMENTE INTORNO AL SUO ASSINTOTO

---

1. Chiamo curva logaritmica la linea piana, la cui sottotangente misurata sopra una retta fissa ha una lunghezza costante, qualunque sia il punto della curva, al quale essa sottotangente è relativa. Da questa definizione risulta che la curva è assintotica alla retta fissa suaccennata.

Chiamo moto elicoidale della logaritmica attorno il suo assintoto quel moto, pel quale i singoli punti della curva descrivono eliche segnate sopra cilindri di rivoluzione aventi per asse comune il detto assintoto, tutte del medesimo senso e tutte dello stesso passo.

2. Dicasi Σ la superficie generata dalla curva logaritmica moventesi elicoidalmente attorno al suo assintoto; e sieno k la sottotangente costante della logaritmica sua generatrice, h il *passo ridotto* comune delle eliche descritte dai differenti punti di questa curva.

Riferito l'elicoide Σ a due piani di proiezione ortogonali fra loro, dei quali uno, l'orizzontale, sia perpendicolare all'assintoto della logaritmica generatrice, rappresentino O' (V. la figura annessa) la traccia orizzontale ed $O''Z''$ la proiezione verticale di quest' assintoto: M', M'' le proiezioni orizzontale e verticale di un punto qualunque M di Σ; m il punto in cui la $O''Z''$ è tagliata da una parallela alla linea di terra condotta per M''.

Il piano Θ tangente in M a Σ contiene la tangente in detto punto alla logaritmica generatrice nella posizione, in cui essa generatrice passa pel medesimo, epperciò taglia l'assintoto di questa curva in un punto, la cui proiezione verticale O'' dista di k da m.

Lo stesso piano Θ contiene pure la tangente in M all'elica descritta da questo punto della logaritmica nella generazione della superficie, la quale tangente incontra il piano orizzontale X condotto pel punto (O', O'') nel punto N proiettato orizzontalmente in N', sulla perpendicolare in M' alla retta $O'M'$, ad una distanza da M'

$$M'N' = \frac{k}{h} O'M'.$$

La traccia orizzontale del piano Θ è parallela alla retta $O'N'$, e l'angolo α, che essa fa colla $O'M'$, è indipendente dalla posizione del punto M sulla superficie Σ, perchè la sua tangente trigonometrica ha per espressione $\frac{k}{h}$.

3. Consideriamo l'intersezione c di Σ con un cilindro avente per sezione retta la traiettoria ad angolo costante qualunque β del fascio di raggi, che è posto nel piano orizzontale di proiezione, ed ha per centro il punto O', ossia una spirale logaritmica qualunque c' giacente nel detto piano orizzontale di proiezione col suo polo

in O'. Sia M un punto della c: la tangente a questa linea nel punto M si proietta orizzontalmente secondo la retta M'P', che fa in M' colla O'M' un angolo uguale a β. E poichè questa tangente è contenuta nel piano Θ, il punto P in cui essa taglia il piano X ha per sua proiezione orizzontale l'incontro P' della M'P' colla O'N'.

La stessa tangente oggettiva tocca pure in M la trasformata di c, che si ottiene, quando si sviluppa questo cilindro sul piano tangente ad esso lungo la sua generatrice rettilinea passante per M.

In tale sviluppo, l'arco della c' che è compreso fra i punti M' ed O', per la costante inclinazione della tangente ad esso arco sul raggio vettore condotto da O' al punto di contatto, viene a sovrapporsi al segmento M'L' della M'P' compreso fra M' e l'intersezione L' di M'P' colla normale in O' ad O'M'. E quindi la sottotangente in M all'anzidetta trasformata della c misurata sulla posizione presa nello sviluppo del cilindro dalla generatrice (O', O''Z'') di questo, ossia sulla verticale, che ha per sua traccia orizzontale il punto L', ha per espressione della sua lunghezza $k\frac{L'M'}{P'M'}$.

Ora col variare del punto M sulla c, ciascuno dei triangoli O'M'L', O'M'P' rimane simile a se stesso, cioè restano costanti i rapporti $\frac{L'M'}{O'M'}$, $\frac{O'M'}{P'M'}$; epperciò resta anche costante il prodotto $\frac{L'M'}{P'M'}$ di questi rapporti.

La sottotangente dunque testè accennata non cambia di lunghezza col cambiare del punto M; ossia la trasformata dell'intersezione di Σ con un cilindro a generatrici verticali, di cui la traccia orizzontale sia una spirale lo-

garitmica avente il suo polo in O', è una curva logaritmica assintotica alla posizione presa nello sviluppo del cilindro dalla generatrice $(O', O''Z'')$ del cilindro stesso.

4. Nel caso speciale, in cui fosse $\beta = \alpha$, cioè quando $M'P'$ fosse parallela ad $O'N'$, il rapporto $\frac{L'M'}{P'M'}$ sarebbe nullo, epperciò nulla la lunghezza della sottotangente alla trasformata della sezione del cilindro con Σ ; ossia questa trasformata sarebbe una retta normale alle posizioni prese dalle generatrici del cilindro dopo lo sviluppo di questo.

L'intersezione del cilindro con Σ sarebbe dunque una linea posta in un piano orizzontale ed identica alla traccia orizzontale del cilindro. Ne segue che le linee di livello di Σ sono spirali logaritmiche sovrapponibili, le tangenti delle quali incontrano i raggi vettori, che vanno dal polo ai rispettivi punti di contatto, sotto un angolo, la cui tangente trigonometrica vale $\frac{k}{h}$, e che la superficie Σ può anche essere generata dal moto elicoidale con passo ridotto h di una di dette spirali.

5. Le linee di massima pendenza di una superficie qualunque avendo per loro proiezioni orizzontali le traiettorie ortogonali delle linee di livello della superficie stessa, le linee di massima pendenza di Σ si proiettano orizzontalmente secondo spirali logaritmiche congruenti fra loro, delle quali O' è il polo comune, e di cui una tangente qualunque seca il corrispondente raggio vettore ad angolo complemento di α. Sviluppando in piano i cilindri che proiettano orizzontalmente queste linee di massima pendenza, le trasformate, che di esse si ottengono, sono curve logaritmiche identiche.

Tirisi da M' la $M'R'$ normale in R' ad $O'N'$, e sia G'

il punto in cui essa incontra la $O'L'$: il valore assoluto costante della sottotangente delle suddette trasformate è

$$k\frac{G'M'}{R'M'}=k\frac{O'N'}{N'R'}=k\frac{\overline{O'N'}^2}{\overline{M'N'}^2}=k\frac{h^2+k^2}{k^2}=\frac{h^2+k^2}{k}.$$

6. Si è veduto che il piano tangente a Σ in un punto qualunque M taglia la retta (O', $O''Z''$) nel punto (O', O'') distante k dal piano orizzontale condotto per M.

Ne consegue che la sviluppabile circoscritta a Σ lungo la sezione fatta in questa superficie da un piano orizzontale qualunque è un cono, il cui vertice si trova sull'assintoto della logaritmica generatrice dell'elicoide ad una distanza k del detto piano, e che perciò se l'elicoide Σ sia illuminato da una stella di raggi divergenti da un punto dovunque posto sull'assintoto della logaritmica generatrice, tanto il contorno dell'ombra propria della superficie, quanto il contorno dell'ombra, che questa proietta sopra un piano qualunque normale al detto assintoto, sono spirali logaritmiche tutte congruenti fra loro.

7. Occupiamoci ora della sezione fatta in Σ da un cilindro qualunque di rivoluzione, del quale la retta (O', $O''Z''$) sia una generatrice.

Sia M' un punto qualunque della circonferenza $O'\mu'T'$ traccia orizzontale di questo cilindro, cosicchè il punto (M', M'') sia un punto qualunque della sezione del cilindro con Σ.

Per M' tirisi la $M'\mu'$ parallela ad $O'N'$, notisi con μ' il punto, in cui la detta $M'\mu'$ incontra una seconda volta la traccia orizzontale del cilindro, e conducasi la $O'\mu'$. Per essere l'angolo $O'M'\mu'$ uguale, o supplementare, al-

l'angolo α, secondochè M' si trova nell'uno o nell'altro dei segmenti, in cui la circonferenza $O'\mu'T'$ è divisa dalla sua corda $O'\mu'$, questi segmenti avranno, qualunque sia il punto M', grandezza costante, ossia la posizione di μ' su quella circonferenza non dipenderà da quella di M' sulla circonferenza stessa. Conducasi per M' la retta $M'Q'$ parallela ad $O'\mu'$, la quale incontri $O'N'$ in Q': la figura $O'\mu'M'Q'$ è un parallelogramma, del quale, col muoversi di M' sulla circonferenza $O'\mu'T'$, il lato $M'Q'$ resta costantemente parallelo e di lunghezza uguale al segmento fisso $O'\mu'$.

In conseguenza, se si considera la retta $M'Q'$ come la proiezione orizzontale di una retta contenuta nel piano Θ tangente a Σ in M, questa retta oggettiva, col muoversi di M sull'intersezione di Σ col cilindro avente per sezione retta la circonferenza $O'\mu'T'$, rimane costantemente parallela a se stessa, perchè la sua proiezione orizzontale $M'Q'$ è sempre parallela ad $O'\mu'$, e la sua inclinazione al piano orizzontale non varia, essendo la tangente trigonometrica dell'angolo, che misura tale inclinazione, espressa da $\frac{k}{Q'M'} = \frac{k}{O'\mu'}$.

Si può dunque conchiudere che i piani tangenti in Σ nei differenti punti dell'intersezione di quest'elicoide col cilindro di rivoluzione, di cui parliamo, sono tutti paralleli ad una medesima retta, ossia che la detta intersezione è il contorno dell'ombra propria della superficie Σ illuminata da raggi aventi tutti una stessa direzione conveniente.

8. Viceversa, qualunque sia la direzione comune dei raggi di una stella luminosa cadente sulla superficie Σ, il contorno dell'ombra propria di questa superficie si

proietta orizzontalmente secondo una circonferenza che passa per il punto O'.

Infatti, sia $O'l'$ la retta nota, su cui cade la proiezione orizzontale del raggio luminoso, che ha la sua traccia orizzontale in O', e sia $O'l$ la posizione presa dal detto raggio luminoso, quando si fa rotare il piano, che lo proietta orizzontalmente, attorno alla sua traccia $O'l'$ fino a portarlo sul piano orizzontale di proiezione.

Si costruisca il triangolo rettangolo $O'\mu'\mu$, di cui l'ipotenusa $O'\mu$ giaccia sulla $O'l$, un cateto $O'\mu'$ sulla $O'l'$ e l'altro cateto sia in lunghezza uguale alla sottotangente k della logaritmica generatrice della superficie Σ, coll'avvertenza che il vertice μ' cadente sulla $O'l'$ sia posto dall'una o dall'altra parte di O' in guisa che il senso, secondo cui si deve camminare sulla verticale passante pel punto μ', per andare da questo punto μ' al punto oggettivo del raggio luminoso suaccennato, che è proiettato orizzontalmente in μ', sia lo stesso che il senso, per cui si va sulla $O''Z''$ dal punto O'' al punto m.

Sul segmento $O'\mu'$ come cateto si costruisca il triangolo rettangolo $O'\mu'T'$ tale che il suo angolo acuto in O' sia complemento dell'angolo noto α, ossia dell'angolo $M'O'N'$, e che il senso, in cui dovrebbe rotare $O'\mu'$ attorno O', per portarsi sopra $O'T'$, descrivendo l'angolo acuto $\mu'O'T'$, sia lo stesso che il senso, in cui la $O'M'$ dovrebbe rotare attorno lo stesso punto O', per portarsi su di $O'N'$, descrivendo l'angolo acuto $M'O'N'$.

La circonferenza descritta sopra il segmento $O'T'$ come diametro, è la proiezione orizzontale del contorno dell'ombra propria della superficie Σ illuminata da una stella di raggi paralleli fra loro e disposti nel modo che si è detto. Poichè, se, col metodo esposto nel numero

precedente, cerchiamo la retta passante per O′ a cui sono paralleli i piani tangenti a Σ nei punti, in cui questa superficie è secata dal cilindro, che ha per sezione retta la circonferenza descritta sopra O′T′ come diametro, troviamo che la proiezione orizzontale di quella retta è $O'l'$, e che l'angolo ε, che essa fa col piano orizzontale di proiezione, è uguale all'angolo $l'O'l$.

La direzione di O′T′ dipende solo dalla direzione della $O'l'$ e dalla grandezza dell'angolo α: cosicchè, quando Σ non varii, se i raggi che illuminano questa superficie cambiano d'inclinazione sul piano orizzontale di proiezione, restando però paralleli fra loro, e situati ciascuno nel piano verticale che prima lo conteneva, la circonferenza, proiezione del contorno dell'ombra propria di Σ, cambierà di raggio, ma toccherà sempre in O′ una medesima retta.

Dalla costruzione fatta è facile poi ricavare l'espressione seguente della lunghezza del diametro O′T′ di quella circonferenza:

$$O'T' = \sqrt{\overline{O'\mu'}^2 + \overline{\mu'T'}^2} =$$

$$O'\mu' \sqrt{1 + \frac{h^2}{k^2}} = \mu'\mu \sqrt{1 + \frac{h^2}{k^2}} \cot \varepsilon = \sqrt{h^2 + k^2} \cot \varepsilon \ .$$

Manifestamente in questa, come, in generale, nelle altre proposizioni di Geometria descrittiva, le parole *orizzontale* e *verticale*, che spesso vi si incontrano, non devono essere intese nel loro significato *fisico*, ma devono ritenersi come indicanti unicamente una relazione mutua di posizione. E quindi si può stabilire che, comunque nello spazio sia collocato, l'elicoide Σ illuminato da raggi di direzione comune qualunque ha per contorno d'ombra propria la linea, secondo cui esso elicoide è tagliato da

un cilindro di rivoluzione avente l'assintoto della logaritmica generatrice di Σ per una sua generatrice rettilinea, del qual cilindro noi sappiamo determinare la posizione dell'asse, quando sia dato l'elicoide per la grandezza dei suoi parametri, e per la sua posizione rispetto ai raggi che lo illuminano.

9. Nel caso particolare in cui sia $h=0$, l'elicoide Σ si riduce alla superficie generata dalla rivoluzione della curva logaritmica attorno al suo assintoto. Epperò questa superficie è tagliata da un cilindro, le cui generatrici rettilinee sieno parallele all'asse di rivoluzione, e la cui sezione retta sia una spirale logaritmica qualunque avente il suo polo sul detto asse, secondo una curva tale che la sua trasformata, quando si distende il cilindro in un piano, è una logaritmica congruente al meridiano di Σ: poichè, in tal caso, la retta $O'N'$ si confonde colla $O'L'$, ed il punto P' col punto L', dimodochè l'espressione della sottotangente alla trasformata della sezione del cilindro coll'elicoide, la quale fu trovata (n° 3) essere $k\frac{L'M'}{P'M'}$, si riduce a k.

Il contorno poi dell'ombra propria di questa superficie di rivoluzione illuminata da raggi paralleli fra loro si proietta ortogonalmente sul piano orizzontale di proiezione (cioè sul piano di un parallelo qualunque della superficie) secondo una circonferenza, un diametro della quale ha una sua estremità in O', e l'altra nella proiezione orizzontale μ' del punto del raggio luminoso passante per O', che dista di k dal piano orizzontale di proiezione, ed è situato, rispetto a questo piano, dalla stessa parte, da cui è posto il punto m rispetto al punto O''.

10. Quando fosse $k=0$, la logaritmica generatrice di Σ

diverrebbe una retta secante ortogonalmente la $(O', O''Z'')$, ed essa superficie Σ si ridurrebbe al conoide retto conosciuto sotto il nome di *superficie di vite a pane quadrato.*

La trasformata della sezione di questa superficie con un cilindro a generatrici verticali, la cui traccia orizzontale sia una spirale logaritmica avente il suo polo in O', quando si sviluppa il cilindro secante in un piano, è ancora una spirale logaritmica. Veramente, la dimostrazione di questa proposizione data al n° 3 si fonda sulla costanza del valore dell'espressione $k\frac{L'M'}{P'M'}$, la quale espressione, nel caso che consideriamo, si presenta sotto forma indeterminata, poichè se è $k=0$, il punto P' confondesi col punto M', e si ha perciò anche $P'M'=0$. Ma notando che la surriferita espressione generale della sottotangente, per essere $\frac{k}{h}=\frac{M'N'}{O'M'}$, e per la similitudine dei triangoli $P'O'L'$, $P'N'M'$, può trasformarsi nel modo seguente

$$k\frac{L'M'}{P'M'}=h\frac{M'N'}{O'M'}\frac{L'M'}{P'M'}=h\frac{M'N'}{O'M'}\frac{M'N'-L'O'}{M'N'}=h\frac{M'N'-L'O'}{O'M'},$$

si scorge che, quando sia $k=0$, il valore assoluto della detta sottotangente è $h\frac{L'O'}{M'O'}=h\tang\beta$, ossia è ancora costante.

In simil modo si dimostrerebbe che il teorema conosciuto sulla forma del contorno dell'ombra propria del conoide retto, di cui si tratta, illuminato da una stella qualunque di raggi paralleli fra loro è un corollario della proposizione dimostrata al n° 7.

11. Le proprietà dimostrate ai numeri 6 ed 8, relative al contorno dell'ombra dell'elicoide Σ, si possono

mediante trasformazioni omologiche, estendere ad altre superficie.

Limitandoci ai due casi più semplici di questa trasformazione, abbiamo che:

1° Qualunque superficie Σ_1 omologica a Σ rispetto ad un punto della retta (O', O''Z'') come centro di omologia, e ad un piano perpendicolare a questa retta come asse di omologia, quando sia illuminata da una stella di raggi avente il suo centro sulla detta retta, ha per contorno dell'ombra propria, e per contorno dell'ombra da essa proiettata sopra un piano qualunque normale alla retta stessa, due spirali logaritmiche congruenti.

2° Una superficie qualunque Σ_2 affine a Σ, purchè i raggi congiungenti le coppie di punti corrispondenti delle due figure sieno paralleli alla retta (O', O''Z''), se venga illuminata da una stella di raggi aventi tutti una stessa direzione qualunque, presenta per contorno d'ombra propria una curva, per cui passa un cilindro di rivoluzione, del quale la detta retta (O', O''Z'') è una generatrice.

12. Le considerazioni fatte al n° 7 ci conducono alla dimostrazione del seguente teorema di Geometria:

Se un triangolo O'M'P' rota nel suo piano attorno un suo vertice fisso O' restando sempre simile a se stesso e variando di dimensioni lineari, in guisa che il suo lato M'P' passi sempre per un punto fisso I, esistono due segmenti $O'\mu'$, $O'\pi'$ di direzione e grandezza tali che, qualunque sia la posizione del triangolo, il segmento M'Q' della parallela ad $O'\mu'$ condotta pel punto M' compreso fra questo vertice M' del triangolo ed il lato O'P' ad esso opposto è uguale ad $O'\mu'$, ed il segmento P'S' della parallela ad $O'\pi'$ condotta per P' com-

preso fra questo vertice ed il lato opposto $O'M'$ del triangolo è uguale ad $O'\pi'$.

Ed in vero i vertici M', P' del triangolo mobile giacciono, per ogni posizione di questo, l'uno sull'una, l'altro sull'altra di due circonferenze che passano entrambe pei punti O' ed I, i centri delle quali sono così posti, che un segmento dell'una avente per corda, che lo sottende, $O'I$ sia capace dell'angolo dato M' del triangolo, ed il segmento dell'altra che è sotteso dalla stessa corda $O'I$, ed è situato, rispetto a questa corda, da parte opposta al segmento sovraccennato della prima circonferenza, sia capace dell'angolo dato P' del triangolo mobile. Nel punto O' comune a queste due circonferenze si tiri la tangente alla seconda di esse, la quale tagli la prima in μ', e la tangente alla prima, che incontri la seconda in π'. L'angolo P' del triangolo mobile sarà uguale all'angolo $IO'\mu'$, epperciò all'angolo $IM'\mu'$; e quindi l'angolo $O'M'\mu'$, somma degli angoli $O'M'I$, $IM'\mu'$ varrà la somma dei due angoli in P' ed M' del triangolo mobile, sarà cioè uguale all'angolo esterno in O' del triangolo stesso. La retta $\mu'M'$ è dunque parallela al lato $O'P'$ del triangolo, epperciò se da M' si tira una parallela ad $O'\mu'$ la quale sechi il detto lato $O'P'$ in Q', il quadrilatero $O'\mu'M'Q'$ è un parallelogramma, ed $M'Q'$ è in lunghezza uguale al segmento $O'\mu'$ (*).

In simil modo si dimostrerebbe che il segmento $P'S'$ della parallela ad $O'\pi'$ condotta per P' compreso fra

(*) In questa dimostrazione si è supposto che il punto M' della circonferenza $O'IM'$ giaccia in quello dei segmenti, in cui la detta circonferenza è secata dalla $O'\mu'$, nel quale non si trova il punto I: la proposizione è però ugualmente vera, e la sua dimostrazione affatto analoga, nel caso contrario.

questo vertice P′ ed il lato opposto O′M′ del triangolo mobile è uguale in lunghezza al segmento O′π′.

Sussiste pure, e si dimostra in modo analogo, la proposizione inversa, cioè:

Se un triangolo O′M′P′ rota nel suo piano attorno un suo vertice fisso O′, restando sempre simile a se stesso, e variando di dimensioni lineari per modo che, qualunque sia la posizione di esso, il segmento M′Q′ di una retta condotta per uno, M′, dei suoi vertici mobili parallelamente ad una retta fissa O′μ′ data ad arbitrio, compreso fra il detto vertice M′ ed il lato O′P′ ad esso opposto sia sempre diretto nello stesso senso, e sia sempre in lunghezza uguale ad un segmento dato O′μ′, il lato M′P′ del triangolo mobile, che è opposto al suo vertice fisso O′, passa sempre per un punto fisso I, ed esiste un altro segmento O′π′ di direzione e grandezza tali, che la porzione di parallela ad O′π′, condotta per l'altro vertice mobile P′ del triangolo compreso fra questo vertice ed il lato O′M′ ad esso opposto, è costantemente uguale in lunghezza al segmento O′π′.

Ciascuno dei due triangoli μ′IO′, O′Iπ′ è simile al triangolo M′O′P′, e quindi essendo noti i rapporti di un lato del triangolo mobile a ciascuno degli altri due, dato di posizione e grandezza uno qualunque dei tre segmenti O′I, O′μ′, O′π′, si determinano facilmente gli altri.

Z''
m
M''
k
h
O''
X''
P'
π'
L'
I
μ'
l'
S'
O'
ε
β
α
M'
Q'
μ
l
R'
T'
G'
N'